Exercice 1

1) Sachant que $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et que $\sin x = \frac{1}{4}$, calculer $\cos x$ et $\tan x$
2) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$
3) Résoudre dans $[0, \pi]$, $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
4) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\cos^4 x - \sin^4 x - 2\cos^2 x = -1$

Exercice 2

ABC un triangle tel que $AC = 3$, $AB = 8$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

Déterminer BC.

Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que $AC = 6$, $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$

1) En appliquant la loi de sinus montrer que $AB = 3\sqrt{6}$
2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^2 - 6x - 18 = 0$
   b) En déduire, en appliquant le théorème d'El-Kashi, que $BC = 3\left(1 + \sqrt{3}\right)$
   c) Calculer l'aire du triangle ABC
3) Montrer que $\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{12}$
4) Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC
   a) Calculer R le rayon de $\mathscr{C}$
   b) En déduire que $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
   c) Calculer $\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2$
   d) En déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 4

Soit $A = \cos(\pi - \alpha) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \tan(\pi - \alpha)$ où $\alpha \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

1) Monter que $A = -3\cos\alpha - \tan\alpha$
2) On pose $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $\sin\alpha = \frac{2}{3}$
   a) Calculer $\cos\alpha$ puis $\tan\alpha$
   b) En déduire la valeur de l'expression de A

Exercice 5

Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$

1) Calculer BC
2) Calculer R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
3) Soit I le milieu de $[AC]$. Calculer BI

Exercice 6

1) Calculer $\cos a$ et $\sin a$ sachant que $\tan a = -\sqrt{3}$ et $a \in [0, \pi]$
2) Calculer sans utiliser la calculatrice : $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$
3) Montrer l'égalité suivante $\frac{1}{1 + \cotan^2 x} - \frac{1}{1 + \cotan^2 y} = \cos^2 y - \cos^2 x$ où x et y sont deux réels de $]0, \pi[$

Exercice 7

1) Calculer les sommes suivantes en justifiant :

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)-\sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)-\sin\left(\frac{15\pi}{16}\right)$$

$$B=\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)-4$$

2) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation $(2\cos^2 x-1)\left(\sin^2 x-\frac{1}{4}\right)=0$

Exercice 8

Partie A

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E): 2x^2+3x-2=0$
2) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation $(E'): 2\sin^2\alpha+3\sin\alpha-2=0$

Partie B

Pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on donne $f(x)=2\cos^2 x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\sin^2(\pi-x)$

1) Montrer que $f(x)=2-\sin x$
2) Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$
3) Résoudre l'équation $f(x)=2$ dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 9

On donne $f(x)=-2\sin^2 x-3\cos(\pi-x)+3$ pour tout $x\in[0,\pi]$

1) Calculer $f(0)$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$
2) Montrer que $f(x)=2\cos^2 x+3\cos x+1$
3) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation $f(x)=0$

Exercice 10

Soit ABC un triangle tel que $AB=2\sqrt{3}$, $AC=5$ et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{6}$

1) Montrer que $BC=\sqrt{7}$
2) Calculer S l'aire du triangle ABC
3) En appliquant la loi de sinus, donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ à 1 degré près.

Exercice 11

Soit ABC un triangle isocèle dont les angles sont tous aigus tel que $AB=AC=b$ et $\widehat{BAC}=2\alpha$. On désigne par A' le projeté orthogonale de A sur $[BC]$ et par H le projeté orthogonale de B sur $[AC]$

1) Montrer que $BC=2b\sin\alpha$
2) a) Vérifier que $\widehat{ACB}=\widehat{ABC}=\frac{\pi}{2}-\alpha$
   b) En utilisant les triangles ABH et BCH, calculer BH de deux façons différentes
   c) En déduire que $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$
3) Calculer AH et CH et en déduire que $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
4) En remarquant que $\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\pi}{12}$, déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 12

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et <u>**de rayon 1**</u>, A et B deux points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$, I un point de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{BOI}=\frac{\pi}{4}$ et H le projeté orthogonal de I sur (AB)

1) Faire une figure
2) Calculer OH et AH et déduire que $\cos\widehat{BAI}=\frac{2+\sqrt{2}}{2AI}$
3) a) Donner la mesure de l'angle $\widehat{BAI}$, Justifier
   b) Montrer que AIB est rectangle en I
   c) Montrer que $\cos(\widehat{BAI})=\frac{AI}{2}$

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)-\sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)-\sin\left(\frac{15\pi}{16}\right)$$

$$B=\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)-4$$

2) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation $(2\cos^2 x-1)\left(\sin^2 x-\frac{1}{4}\right)=0$

Exercice 8

Partie A

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E): 2x^2+3x-2=0$
2) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation $(E'): 2\sin^2\alpha+3\sin\alpha-2=0$

Partie B

Pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on donne $f(x)=2\cos^2 x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\sin^2(\pi-x)$

1) Montrer que $f(x)=2-\sin x$
2) Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$
3) Résoudre l'équation $f(x)=2$ dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 9

On donne $f(x)=-2\sin^2 x-3\cos(\pi-x)+3$ pour tout $x\in[0,\pi]$

1) Calculer $f(0)$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$
2) Montrer que $f(x)=2\cos^2 x+3\cos x+1$
3) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation $f(x)=0$

Exercice 10

Soit ABC un triangle tel que $AB=2\sqrt{3}$, $AC=5$ et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{6}$

1) Montrer que $BC=\sqrt{7}$
2) Calculer S l'aire du triangle ABC
3) En appliquant la loi de sinus, donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ à 1 degré près.

Exercice 11

Soit ABC un triangle isocèle dont les angles sont tous aigus tel que $AB=AC=b$ et $\widehat{BAC}=2\alpha$. On désigne par A' le projeté orthogonale de A sur $[BC]$ et par H le projeté orthogonale de B sur $[AC]$

1) Montrer que $BC=2b\sin\alpha$
2) a) Vérifier que $\widehat{ACB}=\widehat{ABC}=\frac{\pi}{2}-\alpha$
   b) En utilisant les triangles ABH et BCH, calculer BH de deux façons différentes
   c) En déduire que $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$
3) Calculer AH et CH et en déduire que $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
4) En remarquant que $\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\pi}{12}$, déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 12

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et **de rayon 1**, A et B deux points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$, I un point de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{BOI}=\frac{\pi}{4}$ et H le projeté orthogonal de I sur (AB)

1) Faire une figure
2) Calculer OH et AH et déduire que $\cos\widehat{BAI}=\frac{2+\sqrt{2}}{2AI}$
3) a) Donner la mesure de l'angle $\widehat{BAI}$, Justifier
   b) Montrer que AIB est rectangle en I
   c) Montrer que $\cos(\widehat{BAI})=\frac{AI}{2}$

d) En déduire que $AI = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

4) Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice 13

1) Soit $x \in [0, \pi[$. Calculer $\cos x$ et $\sin x$ dans les cas suivants :

a) $\tan x = 3$

b) $\cot x = -4$

2) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$

Exercice 14

On donne $x \in]0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

1) Montrer que $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\cos x \sin x}$

2) En déduire que $\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2$

Exercice 15

On pose $A = \cos(\pi - \alpha) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \tan(\pi - \alpha)$

1) Monter que $A = -3\cos\alpha - \tan\alpha$

2) On pose $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $\sin\alpha = \frac{2}{3}$

a) Calculer $\cos\alpha$ puis $\tan\alpha$

b) En déduire la valeur de l'expression de A

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\cos^2\alpha)x^2 - x - \cos^2\alpha + 1 = 0$

Exercice 16

Soit $x \in [0, \pi]$ et $f(x) = 3\cos x - 4\cos x \sin^2 x$

1) a) Calculer $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

b) Montrer que $f(\pi - x) = -f(x)$

c) Montrer que $f(x) = (4\cos^2 x - 1)\cos x$ puis résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$

2) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $2\sin^2 x + (\sqrt{3} - 2)\sin x - \sqrt{3} = 0$

Exercice 17

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A, le point H est le pied de la hauteur issue de A et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit de centre O. On donne $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{8}$ et $BC = 4$

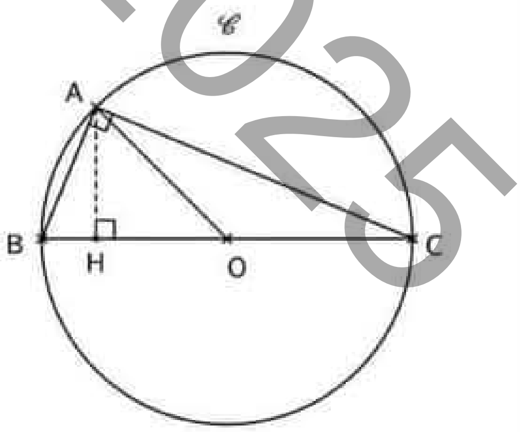
1) a) Calculer les mesures des angles du triangle AOH

b) Montrer que $OH = AH = \sqrt{2}$

c) Calculer alors CH et AC

d) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$



Exercice 1

1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

$x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ donc $\cos x < 0$ et par suite $\cos x = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

2) $$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{9}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

3) $(E) : 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

On pose $t = \cos x$, $(E) \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x = 1$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$

4) Pour $x \in [0, \pi]$, $$\begin{aligned}\cos^4 x - \sin^4 x - 2\cos^2 x &= \cos^4 x - (1 - \cos^2)^2 - 2\cos^2 x\\ &= \cos^4 x - (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) - 2\cos^2 x = -1\end{aligned}$$

Exercice 2

D'après le théorème d'El-Kashi on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = 64 + 9 - 2 \times 3 \times 8 \times \frac{1}{2} = 49$$

donc $BC = 7$

Exercice 3

1) D'après la loi de sinus, $\frac{AB}{\sin\hat{C}} = \frac{AC}{\sin\hat{B}} = \frac{BC}{\sin\hat{A}}$ et par suite $\frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{AC}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

donc $AB = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} AC = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times 6 = 3\sqrt{6}$

2) a) $x^2 - 6x - 18 = 0$ $\quad \Delta = (-6)^2 - 4 \times (-18) = 108$

donc $x = \frac{6 + \sqrt{108}}{2} = \frac{6 + 6\sqrt{3}}{2} = 3 + 3\sqrt{3}$ ou $x = \frac{6 - \sqrt{108}}{2} = \frac{6 - 6\sqrt{3}}{2} = 3 - 3\sqrt{3}$

b) D'après le théorème d'El-Kashi, $$\begin{aligned}AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2BC \times AC \times \cos\widehat{ACB}\\ &= 36 + BC^2 - 12 \times BC \times \cos\frac{\pi}{3}\\ &= BC^2 - 6 \times BC + 36\end{aligned}$$

d'autre part $AB^2 = (3\sqrt{6})^2 = 54$ donc $BC^2 - 6 \times BC + 36 = 54$ ou encore $BC^2 - 6 \times BC - 18 = 0$

donc BC est la racine positive de l'équation (E) c'est-à-dire $BC = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3})$

c) L'aire du triangle ABC est $\mathcal{A} = \frac{1}{2} AB \times BC \sin\hat{B} = \frac{1}{2} 3\sqrt{6} \times 3(1 + \sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{18(3 + \sqrt{3})}{4}$

3) $\widehat{BAC} = \pi - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{12}$

4) a) $\frac{AB}{\sin\widehat{ACB}} = 2R$ donc $R = \frac{AB}{2\sin\widehat{ACB}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{2}$

b) $\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = 2R$ donc $\sin\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{2R} = \dfrac{3\left(1+\sqrt{3}\right)}{6\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et par suite $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c) $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{6-2\sqrt{6}\sqrt{2}+2}{16} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

d) $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = 1-\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = 1-\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1-\dfrac{6-2\sqrt{6}\sqrt{2}+2}{16} = 1-\dfrac{2+\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$

$\dfrac{5\pi}{12} \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) > 0$ et par suite $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{4} = \dfrac{6+2\sqrt{6}\sqrt{2}+2}{4} = \dfrac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$

Exercice 4

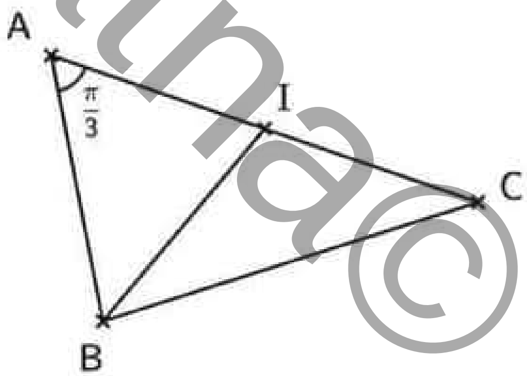
1) $A = \cos(\pi-\alpha) - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) + \tan(\pi-\alpha) = -\cos\alpha - 2\cos\alpha - \tan\alpha = -3\cos\alpha - \tan\alpha$

2) a) $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ donc $\cos\alpha < 0$ et $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1-\dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$ donc $\cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{5}{9}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{2}{3}}{-\dfrac{\sqrt{5}}{3}} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $A = -3\cos\alpha - \tan\alpha = \dfrac{3\sqrt{5}}{3} + \dfrac{2\sqrt{5}}{5} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}$

Exercice 5



1) D'après le théorème d'El-Kashi,

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 9 + 25 - 2\times 3\times 5\times\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 34 - 30\times\dfrac{1}{2} = 19$

donc $BC = \sqrt{19}$

2) $2R = \dfrac{BC}{\sin\left(\widehat{BAC}\right)} = \dfrac{\sqrt{19}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{19}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$ donc $R = \dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$

3) D'après le théorème d'El-Kashi appliqué dans le triangle ABI on a :

$BI^2 = AB^2 + AI^2 - 2\times AB\times AI\times\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 3^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 2\times 3\times\dfrac{5}{2}\times\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 9 + \dfrac{25}{4} - \dfrac{15}{2} = \dfrac{31}{4}$

donc $BI = \sqrt{\dfrac{31}{4}} = \dfrac{\sqrt{31}}{2}$

Exercice 6

1) $\tan a = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{\sin a}{\cos a} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin a = -\sqrt{3}\cos a$ donc $\sin^2 a = 3\cos^2 a$

d'autre part $\cos^2 a = 1-\sin^2 a \Leftrightarrow \sin^2 a = 3\left(1-\sin^2 a\right) = 3 - 3\sin^2 a$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 a = 3$

$$\Leftrightarrow \sin^2 a = \frac{3}{4}$$

et par suite $\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ car $\sin a > 0$

$\sin a = -\sqrt{3}\cos a \Leftrightarrow \cos a = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin a = -\frac{1}{2}$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=0$$

3) Soit x et y deux réels de $]0,\pi[$,

$$\frac{1}{1+\text{cotan}^2 x}-\frac{1}{1+\text{cotan}^2 y}=\frac{1}{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}-\frac{1}{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}-\frac{1}{\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}$$

$$=\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}-\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y+\cos^2 y}$$

$$=\sin^2 x-\sin^2 y$$

$$=1-\cos^2 x-\left(1-\cos^2 y\right)$$

$$=\cos^2 y-\cos^2 x$$

Exercice 7

1) $A=\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)-\sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)-\sin\left(\frac{15\pi}{16}\right)$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)-\sin\left(\pi-\frac{7\pi}{16}\right)-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{16}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)+\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)}-\sin\left(\frac{7\pi}{16}\right)-\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{16}\right)$$

$$=\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)}-\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)}$$

$$=0$$

$B=\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)-4$

$$=\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)-4$$

$$=\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}-4$$

$$=2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+2\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)-\frac{7}{2}$$

$$=2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+2\left(1-\cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)-\frac{7}{2}$$

$$=2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+2\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)-\frac{7}{2}$$

$$=2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+2\left(1-\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)-\frac{7}{2}$$

$$=\cancel{2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}+2-\cancel{2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}-\frac{7}{2}$$

$$=-\frac{3}{2}$$

2) $\left(2\cos^2 x-1\right)\left(\sin^2 x-\frac{1}{4}\right)=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-1=0$ ou $\sin^2 x-\frac{1}{4}=0$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin x = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin x = -\frac{1}{2} \text{ (à rejeter)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

$$S_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

Exercice 8

Partie A

1) $(E) : 2x^2 + 3x - 2 = 0$ $\quad \Delta = 9 - 4\times 2\times(-2) = 25$

donc $x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2$ et $x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

2) $(E') \Leftrightarrow 2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\sin\alpha = -2$ (impossible)

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{6}$

$S_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

Partie B

1) Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = 2\cos^2 x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin^2(\pi - x)$

$$= 2\cos^2 x - \sin x + 2\sin^2 x$$
$$= 2(1 - \sin^2 x) - \sin x + 2\sin^2 x$$
$$= 2 - \cancel{2\sin^2 x} - \sin x + \cancel{2\sin^2 x}$$
$$= 2 - \sin x$$

2) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

3) $f(x) = 2 \Leftrightarrow 2 - \sin x = 2 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $S_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} = \{0\}$

Exercice 9

1) $f(0) = -2\sin^2 0 + 3\cos\pi + 3 = -3 + 3 = 0$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 3 = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 3 = -\frac{3}{2} + 3\times\frac{1}{2} + 3 = 3$

2) Pour $x \in [0,\pi]$, $f(x) = -2\sin^2 x - 3\cos(\pi - x) + 3 = -2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x + 3 = 2\cos^2 x + 3\cos x + 1$

3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

On pose $t = \cos x$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ ou } t = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}$$

Exercice 10

1) D'après le théorème d'El-Kashi,

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 25 - 2\times 2\sqrt{3}\times 5\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 12 + 25 - 20\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 7$

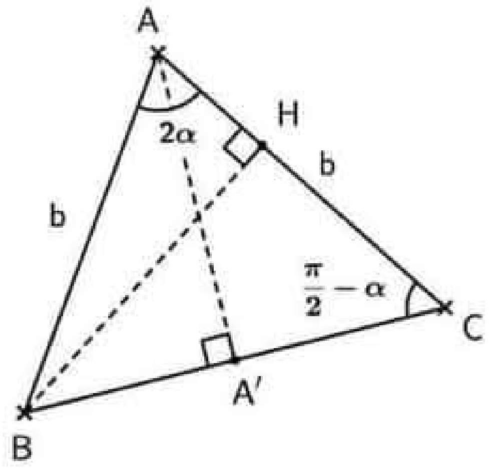
donc $BC = \sqrt{7}$

2) $S = \frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\left(\widehat{BAC}\right) = 5\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

3) D'après la loi de sinus, $\dfrac{BC}{\sin(\widehat{BAC})}=\dfrac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} \Leftrightarrow \sin(\widehat{ABC})=\dfrac{AC\times\sin(\widehat{BAC})}{BC}=\dfrac{5\times\frac{1}{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$

donc $\widehat{ABC}=109°$

Exercice 11



1) ABC est un triangle isocèle en A donc $[AA')$ est la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et A' est le milieu de BC
Dans le triangle rectangle ABA' :
$BA'=AB\times\sin\widehat{BAA'}=b\sin\alpha$
Dans le triangle rectangle ACA' :
$CA'=AC\times\sin\widehat{CAA'}=b\sin\alpha$
et par suite $BC=BA'+A'C=b\sin\alpha+b\sin\alpha=2b\sin\alpha$

2) a) ABC est isocèle en A donc $\widehat{ACB}=\widehat{ABC}=\dfrac{\pi-\widehat{BAC}}{2}=\dfrac{\pi-2\alpha}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

b) Dans le triangle BCH :
$BH=BC\times\sin\widehat{ACB}=BC\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=BC\times\cos\alpha$
Dans le triangle rectangle ABH :
$BH=AB\times\sin\widehat{BAC}=b\sin(2\alpha)$

c) $BH=b\sin(2\alpha)=BC\times\cos\alpha=2b\sin\alpha\times\cos\alpha$ donc $\sin(2\alpha)=2\cos\alpha\sin\alpha$

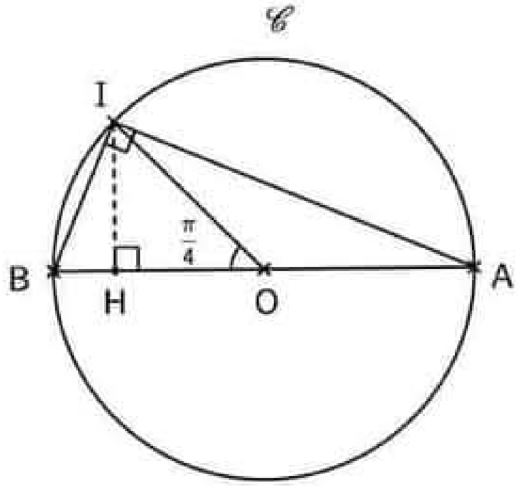
3) Dans le triangle ABH :
$AH=AB\times\cos\widehat{BAC}=b\cos(2\alpha)$
Dans le triangle BCH :
$CH=BC\times\cos\widehat{ACB}=2b\sin\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=2b\sin^2\alpha$
et par suite $AC=b=AH+CH=b\cos(2\alpha)+2b\sin^2\alpha$
donc $b\cos(2\alpha)=b-2b\sin^2\alpha$
ou encore $\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$

4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{12}\right)=1-2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ donc $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

et par suite $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Exercice 12

1)



2) Dans le triangle rectangle IOH :

$$OH = OI \times \cos\widehat{IOH} = OI \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc $AH = OA + OH = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

Dans le triangle rectangle AHI :

$$\cos\widehat{BAI} = \frac{AH}{AI} = \frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{AI} = \frac{2+\sqrt{2}}{2AI}$$

3) a) $\widehat{BAI}$ est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ dont l'angle au centre associé est $\widehat{BOI}$ donc $\widehat{BAI} = \frac{1}{2}\widehat{BOI} = \frac{\pi}{8}$

b) AIB est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ dont le centre O est le milieu de $[AB]$ donc AIB est rectangle en I

c) Dans le triangle rectangle AIB : $\cos\left(\widehat{BAI}\right) = \frac{AI}{AB} = \frac{AI}{2}$

d) $\cos\left(\widehat{BAI}\right) = \frac{AI}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2AI}$ donc $AI^2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

4) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\widehat{BAI}\right) = \frac{AI}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ or $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 13

1) a) $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 - 3^2 = 10$ donc $\cos^2 x = \frac{1}{10}$

d'autre part $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = 3 > 0$ donc $\cos x > 0$ et par suite $\cos x = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = 3 \Leftrightarrow \sin x = 3\cos x = \frac{3}{\sqrt{10}}$

b) $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x = 1 + (-4)^2 = 17$ donc $\sin^2 x = \frac{1}{17}$ et par suite $\sin x = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = -4 \Leftrightarrow \cos x = -4\sin x = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

2) On pose $t = \cos x$:

$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0$ $\quad \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$

$\Leftrightarrow t = \frac{3+5}{4} = 2$ ou $t = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x = 2$ (Impossible) ou $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

Exercice 14

Soit $x \in]0,\pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

1) $\tan x + \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \dfrac{1}{\cos x \sin x}$

2)
$$\begin{aligned}
\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\
&= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\cos^2 x \sin^2 x} \\
&= \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2 + \cos^4 x}{\cos^2 x \sin^2 x} \\
&= \frac{1-2\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^4 x}{\cos^2 x \sin^2 x} \\
&= \frac{1-2\cos^2 x + 2\cos^4 x}{\cos^2 x \sin^2 x} \\
&= \frac{1-2\cos^2 x\left(1-\cos^4 x\right)}{\cos^2 x \sin^2 x} \\
&= \frac{1-2\cos^2 x \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} - \frac{2\cancel{\cos^2 x}\,\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}\,\cancel{\sin^2 x}} \\
&= \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2
\end{aligned}$$

Exercice 15

1)
$$\begin{aligned}
A &= \cos(\pi-\alpha) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \tan(\pi-\alpha) \\
&= -\cos\alpha - 2\cos\alpha - \tan\alpha \\
&= -3\cos\alpha - \tan\alpha
\end{aligned}$$

2) a) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ ou $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

d'autre part $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$ donc $\cos\alpha < 0$ et par suite $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{4}{9}} = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

b) $A = -3\cos\alpha - \tan\alpha = -3\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right) - \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} = \dfrac{7}{\sqrt{5}}$

3) $\left(\cos^2\alpha\right)x^2 - x - \cos^2\alpha + 1 = 0$

$\cos^2\alpha - 1 - \cos^2\alpha + 1 = 0$ donc $x_1 = 1$ et $x_2 = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{1, \tan^2\alpha\right\}$

Exercice 16

1) a) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\times\frac{1}{2} - 4\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3\times\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

b) $f(\pi-x) = 3\cos(\pi-x) - 4\cos(\pi-x)\sin^2(\pi-x) = -3\cos x + 4\cos x\sin x = -f(x)$

c) $f(x)=3\cos x-4\cos x\sin^2 x=(3-4\sin^2 x)\cos x=(3-4(1-\cos^2 x))\cos x=(4\cos^2 x-1)\cos x$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (\cos^2 x-1)\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x=0 \text{ ou } \cos^2 x-1=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2} \text{ ou } \cos^2 x=1$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2} \text{ ou } \cos x=1 \text{ ou } \cos x=-1$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2} \text{ ou } x=0 \text{ ou } x=\pi$$

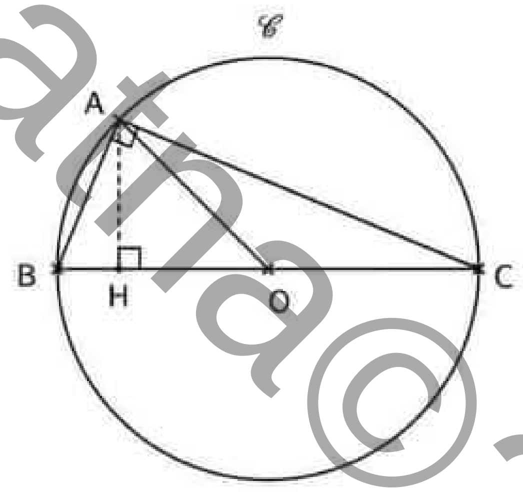
$S_{[0,\pi]}=\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi\right\}$

2) On pose $X=\sin x$ avec $x\in[0,\pi]$

$$2\sin^2 x+(\sqrt{3}-2)\sin x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow 2X^2+(\sqrt{3}-2)X-\sqrt{3}=0$$
$$\Leftrightarrow X=1 \text{ ou } X=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ car } 2+(\sqrt{3}-2)-\sqrt{3}=0$$
$$\Leftrightarrow \sin x=1 \text{ ou } \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (impossible car } x\in[0,\pi])$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

$S_{[0,\pi]}=\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Exercice 17



1) a) $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{ACB}$ dans le cercle $\mathscr{C}$

donc $\widehat{AOB}=2\times\widehat{ACB}=2\times\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$

H est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc $\widehat{AHO}=\frac{\pi}{2}$

$\widehat{HAO}=\pi-(\widehat{AHO}+\widehat{AOH})=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$

Donc AHO est un triangle rectangle et isocèle en H

b) O est le centre de $\mathscr{C}$ donc $OA=\frac{BC}{2}=2$ et par suite $OH=OA\times\cos(\widehat{AOH})=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ donc

$AH=OH=\sqrt{2}$

c) $CH=OC+OH=2+\sqrt{2}$

AHC est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore :

$AC^2=AH^2+CH^2=\sqrt{2}^2+(2+\sqrt{2})^2=2+4+4\sqrt{2}+2=8+4\sqrt{2}=4(2+\sqrt{2})$

et par suite $AC=\sqrt{4(2+\sqrt{2})}=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

d) Dans le triangle rectangle ACH :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\widehat{ACH}\right)=\frac{CH}{AC}=\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\widehat{ACH}\right)=\frac{AH}{CH}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\widehat{ACH}\right)=\frac{CH}{AC}=\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\widehat{ACH}\right)=\frac{AH}{CH}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercise: 3

I. Démontrer les égalités suivantes :

$$\cos^2 x - \cos^2 y = \sin^2 y - \sin^2 x$$

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$$

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x$$

Ex 3 :

m.q $\cos^2 x - \cos^2 y = \sin^2 y - \sin^2 x$?

on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$. donc $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

on remplace $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$

et $\cos^2 y$ par $1 - \sin^2 y$.

$$\cos^2 x - \cos^2 y = 1 - \sin^2 x - (1 - \sin^2 y)$$
$$= \cancel{1} - \sin^2 x \cancel{- 1} + \sin^2 y$$
$$= - \sin^2 x + \sin^2 y.$$
$$= \sin^2 y - \sin^2 x.$$

m.q $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \times \sin^2 x$?

on a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

donc $\tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

on remplace $\tan^2 x$ par $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x\,(\cos^2 x)}{1\,(\cos^2 x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x \,(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot (1 - \cos^2 x)$$

on $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

on remplace $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ par $\tan^2 x$

et $1 - \cos^2 x$ par $\sin^2 x$.

$= \tan^2 x \cdot \sin^2 x.$

$\Pi . q \quad \cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x$?

$\cos^4 x + \sin^4 x = \cos^2 x . \cos^2 x + \sin^2 x . \sin^2 x$

on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

on remplace $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$

et $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$.

$= (1 - \sin^2 x) \cos^2 x + (1 - \cos^2 x) \sin^2 x$

$= \cos^2 x - \cos^2 x . \sin^2 x + \sin^2 x - \sin^2 x . \cos^2 x$

$= \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{= 1} - 2 \cos^2 x . \sin^2 x.$

$= 1 - 2 \cos^2 x . \sin^2 x.$

$\Pi . q \quad \cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x$?

$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2$

⚠ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

produit remarquable

$a = \cos^2 x$, $b = \sin^2 x$

donc $a^2 - b^2 = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2$

$= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$

on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

donc $(\cos^2 x - \sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{=1}$

$= \cos^2 x - \sin^2 x.$

$= \cos^2 x - \sin^2 x.$

on on sait que $\cos(2a) = \boxed{\cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a.}$

$= 1 - 2\sin^2 x.$